

1. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

$$1.1 \quad \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+4}{z-3i}$$

$$1.2 \quad \lim_{z \rightarrow 2+4i} (|z|^2 - i\bar{z})$$

$$1.3 \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2}$$

$$1.4 \quad \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{z + \operatorname{Re} z}$$

$$1.5 \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 1}{z^3 i + 2}$$

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

$$2.1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(in)}{4^n}$$

$$2.2 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$$

$$2.3 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{i(2n+i)}{5n} \right]^n$$

3. Να βρεθεί η εικόνα του κύκλου $|z|=r, r>0$ μέσω της απεικόνισης

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, z \neq 0.$$

4. Να βρεθεί ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ τέτοια ώστε:

$$4.1 \quad u(x, y) = 2(2 \sinh x \sin y + x y), f(0) = 3$$

$$4.2 \quad u(x, y) = \frac{x}{2} \ln(x^2 + y^2) - y \operatorname{Arc} \tan \frac{y}{x}$$

$$4.3 \quad u(x, y) = 4x y^3 - 4x^3 y + x$$

$$4.4 \quad u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 0$$

$$4.5 \quad u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x$$

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$5.1 \quad \int_C (z^2 + z\bar{z}) dz, C: |z|=1, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

$$5.2 \quad \int_C e^{|z|^2} dz, C: \text{Το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 έως το } 1+i$$

$$5.3 \quad \int_0^{1+i} \sin z \cos z dz$$

$$5.4 \quad \int_C (3z^2 - 2z) dz, C: z(t) = t + it^2, t \in [0, 2]$$

$$5.5 \quad \int_C \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz, C: |z|=1$$

6. Να υπολογιστούν οι σειρές Laurent στους δοσμένους δακτυλίους:

$$6.1 \ f(z) = z^4 \sin(3/z), |z| > 0$$

$$6.2 \ f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \alpha) 2 < |z| < 3, \beta) |z| > 3$$

6.3

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}, \text{σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το } z_0 = 0$$

7. Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο σε κάθε μεμονωμένο ανώμαλο σημείο για την $f(z)$.

$$7.1 \ f(z) = \frac{2z-1}{(z-1)^4(z+3)}$$

$$7.2 \ f(z) = e^{z+1/z}$$

$$7.3 \ f(z) = \frac{\sin z^2}{z^z(z^2+1)}$$

8. Με χρήση ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα παρακάτω:

$$8.1 \ \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz$$

$$8.2 \ \int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz$$

$$8.3 \ \int_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} dz$$

$$8.4 \ \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos \theta} dz$$

$$8.5 \ \int_{|z|=1} \frac{3z}{(z^2+4)^2} dz$$

$$8.6 \ \int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4 - 2z^3} dz$$

$$8.7 \ \int_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z} dz$$

$$8.8 \ \int_{|z|=1} z^2 e^{-1/z} dz$$